FILES D' ATTENTE

Définitions :

$$\begin{aligned} N(t): &\quad \text{nombre de clients dans la file au temps } t \\ T: &\quad \text{temps dans la file (attente + service)} \\ T_{tampon}: &\quad \text{temps dans la file (attente uniquement)} \\ \pi_i = &\quad \text{probabilité que } i \text{ clients sont dans la file} \end{aligned}$$

Distribution exponentielle :

$$\begin{aligned} \text{Densité :} &\quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ \text{Fonction de répartition :} &\quad P(t < T) = 1 - e^{-\lambda T} \\ \text{Espérance :} &\quad 1/\lambda \end{aligned}$$

Loi de Little :

$$E(N) = \lambda E(T), \quad \text{où } \lambda \text{ est le taux moyen d'arrivées}$$

File M/M :

$$\begin{aligned} \text{Taux d'arrivées moyen } &= \lambda, \text{ avec distribution exponentielle} \\ \text{Temps moyen entre deux arrivées } &= 1/\lambda \\ \text{Durée moyenne de service par client } &= 1/\mu, \text{ avec distribution exponentielle} \end{aligned}$$

File M/M/1 :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad 0 < \rho < 1$$

$$\pi_0 = 1 - \rho \qquad \pi_i = \pi_0 \rho^i = (1-\rho)\rho^i$$

$$E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad E(T) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$E(T_{\text{tampon}}) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad E(T_{\text{tampon}}) = E(T) - \frac{1}{\mu}$$

File M/M/1/K :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad \rho > 0$$

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\pi_i = \pi_0 \rho^i = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^i, \qquad \text{pour } 0 < i \leq K$$

$$\pi_i = 0, \qquad \text{pour } i > K$$

$$E(N) = \rho \cdot \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} = L \qquad E(N_{\text{tampon}}) = L - (1 - \pi_0)$$

$$E(T) = \frac{L}{(1-\pi_K)\lambda} \qquad E(T_{\text{tampon}}) = E(T) - \frac{1}{\mu}$$

File M/M/m (Erlang C) :

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} \qquad 0 < \rho < 1$$

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}\right)^{-1} \\
\pi_i &= \frac{\pi_0}{i!}(m\rho)^i, && \textbf{pour } 0 < i \leq m \\
\pi_i &= \frac{\pi_0}{m!} m^m \rho^i, && \textbf{pour } i \geq m \\
P(\text{se retrouver dans le tampon}) &= \frac{\frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^k}{k!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}} && \text{Formule de Erlang C}
\end{aligned}$$

File M/M/m/m (Erlang B) :

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} \qquad \rho > 0$$

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{(m\rho)^k}{k!}\right)^{-1} \\
\pi_i &= \frac{\pi_0}{i!}(m\rho)^i, && \textbf{pour } 0 < i \leq m \\
\pi_i &= 0, && \textbf{pour } i > m \\
P(\text{perte de client}) &= \frac{\pi_0 (m\rho)^m}{m!} && \text{Formule de perte de Erlang B}
\end{aligned}$$