Exercice :

Soit une matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Trouvez les probabilités d'état stationnaires.

Solution :

Il faut trouver $\pi = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ tel que :

$$\pi = \pi \mathbf{P}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} p_1 = 0.6p_1 + 0.4p_2 + 0.6p_3 \\ p_2 = 0.2p_1 + 0.5p_2 \\ p_3 = 0.2p_1 + 0.1p_2 + 0.4p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.4p_1 = 0.4p_2 + 0.6p_3 \\ 0.5p_2 = 0.2p_1 \\ 0.6p_3 = 0.2p_1 + 0.1p_2 \\ p_3 = 1 - p_1 - p_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.4p_1 = 0.4p_2 + 0.6(1 - p_1 - p_2) \\ 0.5p_2 = 0.2p_1 \\ 0.6(1 - p_1 - p_2) = 0.2p_1 + 0.1p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.4p_1 = 0.4p_2 + 0.6 - 0.6p_1 - 0.6p_2 \\ 0.5p_2 = 0.2p_1 \\ 0.6 - 0.6p_1 - 0.6p_2 = 0.2p_1 + 0.1p_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.6 - 0.2p_2 \\ p_2 = \frac{0.2}{0.5}p_1 \\ 0.8p_1 = 0.6 - 0.7p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.6 - 0.2\left(\frac{0.2}{0.5}p_1\right) \\ 0.8p_1 = 0.6 - 0.7\left(\frac{0.2}{0.5}p_1\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.6 - 0.08p_1 \\ 0.8p_1 = 0.6 - 0.28p_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.08p_1 = 0.6 \\ 1.08p_1 = 0.6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{p_1 = 5/9}$$

$$p_2 = \frac{0.2}{0.5}p_1 = 2/9, \qquad p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 2/9$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ validation avec Matlab au verso

Les probabilités stationnaires seront très similaires aux probabilités de visiter chaque état après n étapes, où n est large.

```
>> P=[0.6 0.2 0.2; 0.4 0.5 0.1; 0.6 0 0.4]
P =

   0.60000   0.20000   0.20000
   0.40000   0.50000   0.10000
   0.60000   0.00000   0.40000

>> P^50
ans =

   0.55556   0.22222   0.22222
   0.55556   0.22222   0.22222
   0.55556   0.22222   0.22222

>>
```

Donc après 50 itérations on aura une probabilité 55.556% d'arriver à l'état 1, 22.222% d'arriver à l'état 2 et 22.222% d'arriver à l'état 3.

Peu importe si on est parti du premier état (1ere ligne), du deuxième état (2eme ligne) ou du troisième (3eme ligne), ces probabilités seront presque identiques.