Laboratoire 1 : Simulation de variables aléatoires

Dr Efstratios Rappos

09 octobre 2017

1

Fonction de densité et Fonction de répartition

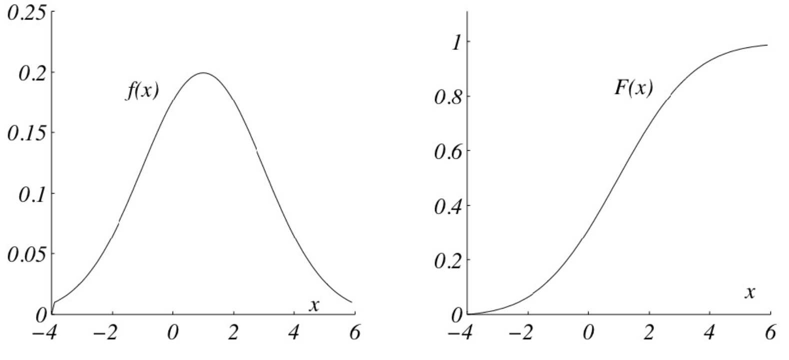


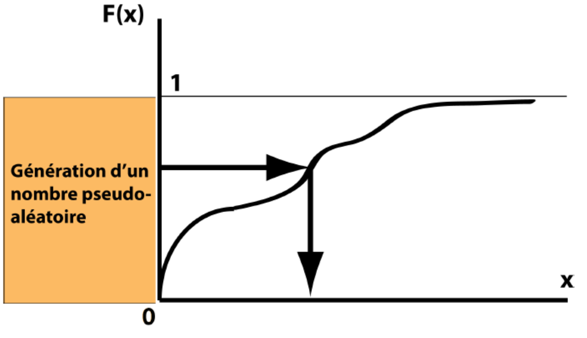
Figure: Densité et fonction de répartition d'une variable aléatoire Gaussienne (ou Normale) avec $\mu = 1$ et $\sigma = 2$

2

Génération de réalisations de variables aléatoires

Méthode de **transformation inverse**

Variable aléatoire discrète : $F(x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$



Exemple 1 : loi uniforme continue

La densité de la loi de probabilité uniforme continue sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{b-a}}$$

quand $a \leq x \leq b$ avec $a < b$, $f_X(x) = 0$ ailleurs. La fonction de répartition correspondante est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ (x-a)/(b-a) & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

$E[X] = (a+b)/2, \; Var(X) = (b-a)^2/12$

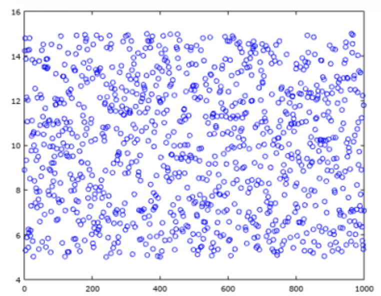
Exemple 1 : Simulation avec Octave

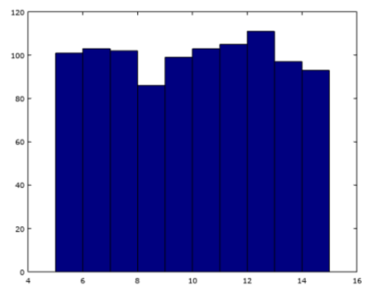
N = 1000 valeurs générées
a = 5   b = 15

```
EDU>> x=rand(1000,1);

EDU>> x=5+10*x;

EDU>> plot(x,'o')
EDU>> hist(x)
```





5

Exemple 1 : Simulation avec Octave (2)

Moyenne

```
EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:1000
S = S + x(t)
end
EDU>> m = S / 1000
m = 9.9528
```

Variance + écart-type

```
EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:1000
S = S + ( x(t) – m) ^ 2
end
EDU>> v = S / 1000
v = 8.7699
EDU>> s = sqrt(v)
s = 2.9614
```

Test

```
EDU>> m2 = mean(x)
m2 = 9.9528

EDU>> v2 = var(x)
v2 = 8.7787   (!!!!!!!!!)

EDU>> help var

EDU>> v2 = var(x,1)
v2 = 8.7699
```

6

Exemple 1 : Valeurs théoriques

- Espérance mathématique

  M = (b – a) / 2 = 10

- Variance

  V = (b – a)^2 / 12 = 8.3333

- Ecart-type

  s = $\sqrt{V}$ = 2.8868

7

Différence entre variance de la population et d'un échantillon

Population

- Moyenne
- $\mu = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$
- Variance
- $var = \frac{(X_1-\mu)^2 + (X_2-\mu)^2 + \ldots + (X_N-\mu)^2}{N}$

Echantillon

- Estimation de la moyenne
- $\hat{\mu} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$
- Estimation de la variance
- $\widehat{var} = \frac{(X_1-\hat{\mu})^2 + (X_2-\hat{\mu})^2 + \ldots + (X_N-\hat{\mu})^2}{N-1}$

8

Exemple 2 : échantillon

N = 10000
a = 5   b = 15

```
EDU>> x=rand(10000,1);

EDU>> x=5+10*x;

EDU>> m_pop = mean(x)
m_pop = 9.9863

EDU>> v_pop = var(x,1)
v_pop = 8.3842
```

Échantillon N=500 :

```
EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:500
S = S + x(t);
end
EDU>> m = S / 500
m = 9.8832

EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:500
S = S + ( x(t) – m) ^ 2
end
EDU>> v = S / 500
v = 8.2859
```

(la variance des 500 valeurs)

```
EDU>> v = S / 499
```

v = 8.3025 (une meilleure estimation de la variance de la population)

9

Exemple 3 : La loi exponentielle

- Un paramètre : λ ($\lambda > 0$)
- Fonction de densité

$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0, \text{ nulle ailleurs}}$$

- Fonction de répartition

$$\boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0, \text{ nulle ailleurs}}$$

- $E[X] = 1/\lambda,\ Var[X] = 1/\lambda^2.$

10

Exemple 3 : La loi exponentielle (2)

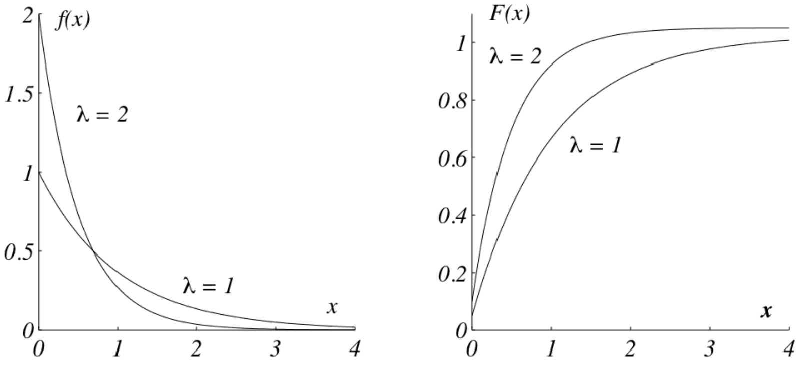


Figure: Densité et fonction de répartition d'une variable aléatoire exponentielle

11

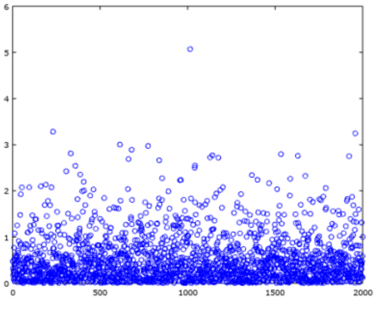
Exemple 3 : Simulation avec Octave

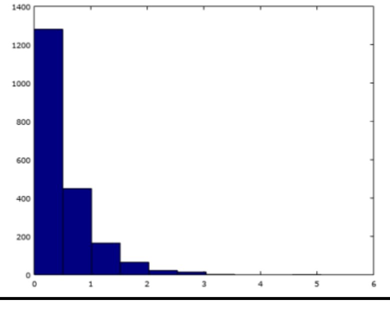
N = 2000 valeurs générées
$\lambda = 2.0$

```
EDU>> x=rand(2000,1);

EDU>> x= -log(1-x)/2.0;

EDU>> plot(x,'o')
EDU>> hist(x)
```





12

Exemple 3 : Simulation avec Octave (2)

Moyenne

```
EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:2000
S = S + x(t);
end
EDU>> m = S / 2000
m = 0.51327
```

Variance

```
EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:2000
S = S + ( x(t) – m) ^ 2
end
EDU>> v = S / 2000
v = 0.26528
EDU>> s = sqrt(v)
s = 0.51506
```

Test

```
EDU>> m2 = mean(x)
m2 = 0.51327

EDU>> v2 = var(x)
v2 = 0.26542
EDU>> v2 = var(x,1)
v2 = 0.26528
```

Valeurs théoriques

m = 1 / λ = 0.5

var = 1 / λ^2 = 0.25

13

Exemple 4 : La loi Gaussienne (ou Normale)

- Deux paramètres : μ et $\sigma^2 > 0$.
- Fonction de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma)}$$

- Fonction de répartition

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-\mu)^2/(2\sigma)} du$$

- $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$.

14

Exemple 4 : La loi Gaussienne (ou Normale)

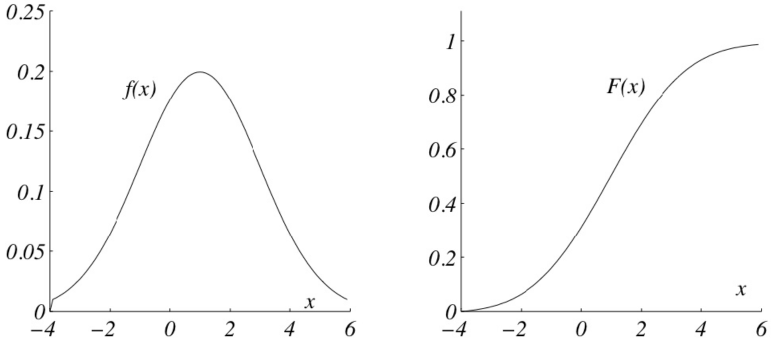


Figure: Densité et fonction de répartition d'une variable aléatoire Gaussienne (ou Normale) avec $\mu = 1$ et $\sigma = 2$

15

Exemple 4 : La loi Gaussienne (ou Normale)

Méthode de **Box-Miller** : Les deux variables aléatoires ci-dessous sont iid et normalement distribuées :

$$X_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$X_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

avec U_1, U_2 générés dans $[0,1]$.
Pour obtenir une distribution de $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ il suffit de savoir que $Y = \mu + \sigma X$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

16

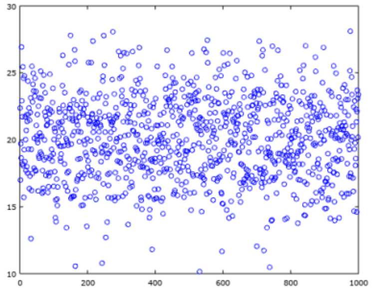
Exemple 4 : Simulation avec Octave

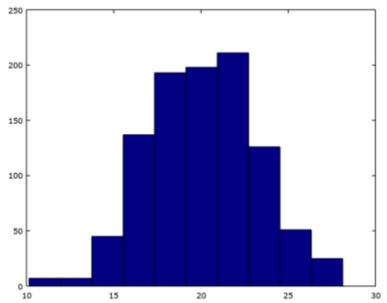
N = 1000 valeurs générées
µ = 20.0   σ= 3.0

```
EDU>> u1=rand(1000,1);
EDU>> u2=rand(1000,1);
EDU>> x1=sqrt(-
2*log(u1)).*sin(2*pi*u2);

EDU>> x= 20.0 + 3.0*x1;

EDU>> plot(x,'o')
EDU>> hist(x)
```





Exemple 4 : Simulation avec Octave (2)

N = 1000 valeurs générées
µ = 20.0   σ= 3.0

Moyenne

```
EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:1000
S = S + x(t)
end
EDU>> m = S / 1000
m = 20.113
```

Variance

```
EDU>> S=0
EDU>> for t= 1:2000
S = S + ( x(t) – m) ^ 2
end
EDU>> v = S / 1000
v = 8.7450
EDU>> s = sqrt(v)
s = 2.9572
```

Test

```
EDU>> m2 = mean(x)
m2 = 20.113
EDU>> v2 = var(x)
v2 = 8.7538
EDU>> v2 = var(x,1)
v2 = 8.7450
```

Le Bootstrap

- Estimation de la variance et/ou intervalle de confiance à travers d'une simulation
- Nous pouvons estimer la variance, mais sa conversion en intervalles de confiance n'est pas facile que dans le cas d'une estimation de la moyenne et/ou une distribution normale
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Bootstrap_(statistiques)
- Certains éléments de l'échantillon sont modifiés, en supprimant quelques observations et en dupliquant centaines autres
- La taille du nouveau échantillon reste la même
- On recalcule le paramètre qui nous intéresse
- Après un nombre d'itérations, on peut estimer la variance et IC

19

Exemple 5 : Bootstrap – loi Normale

N = 100
μ = 20.0   σ= 3.0 itérations: 200

```
EDU>> x=normrnd (20,3,100,1);

EDU>> plot(x,'o');

EDU>> mean(x)
ans = 20.356

EDU>> var(x)
ans = 10.717
```

90% IC théoriques pour normale/moyenne
20.356-/+1.695*sqrt(10.717/100)
= [19.801 , 20.911]

Estimation bootstrap:

```
EDU>> for t=1:200
for s=1:100
y(s,t) = x(randperm(100,1));
end;
end;

EDU>> z = mean(y);
EDU>> z = z' ;
EDU>> z = sort(z)
EDU>> z(10)
ans= 19.799
EDU>> z(190)
ans = 20.853
```

90% intervalle de confiance pour la moyenne: [19.799 , 20.853]

20

Exemple 6 : Bootstrap – loi Poisson

N = 60
λ = 5.0 itérations: 500

```
EDU>> x=poissrnd (5,60,1);

EDU>> hist(x)

EDU>> mean(x)
ans = 5.100

EDU>> var(x)
ans = 6.2949
```

90% IC théoriques pour normale/moyenne
5.1-/+1.695*sqrt(6.2949/60) =
[4.551 , 5.649]

```
EDU>> for t=1:500
for s=1:60
y(s,t) = x(randperm(60,1));
end;
end;

EDU>> z = mean(y);
EDU>> z = z' ;
EDU>> z = sort(z)
EDU>> z(25)
ans= 4.600
EDU>> z(475)
ans = 5.6167
```

90% intervalle de confiance pour la moyenne: [4.600 , 5.617]

21

Exemple 6 : Bootstrap – loi Poisson (2)

Estimation de l' intervalle de confiance pour la médiane:

```
EDU>> z = median(y);
EDU>> z = z' ;
EDU>> z = sort(z)
EDU>> z(25)
ans= 4
EDU>> z(475)
ans = 5.5
```

90% intervalle de confiance pour la médiane: [4 , 5.5]

Pas de formule exacte possible!

22